7) Έχει 1770 νομίσματα, x άλογα και y αγελάδες. $x,y \in \mathbb{N}$ 30-3-15

$31x+21y=1770$

$(31,21)=1$.

$31x+21y=1=31(-2)+21\cdot 3$.

$31=21\cdot 1+10 \rightarrow 10=31-21$

$21=10\cdot 2+1 \rightarrow 1=21-10\cdot 2=21-(31-21)\cdot 2=-31\cdot 2+21\cdot 3$

$x=-2\cdot 1770+21t$ $\quad x\geq 0 \Rightarrow \frac{21t}{21}\geq \frac{2\cdot 1770}{21}$, $t\geq 2\cdot\frac{1770}{21}$

$y=3\cdot 1770-31t$ $\quad y\geq 0 \Rightarrow 3\cdot 1770\geq 31t \Rightarrow$

$\boxed{t\in \mathbb{Z} \text{ και } 0\leq x,y}$ $\quad 2\cdot\frac{1770}{21}\leq t\leq \frac{3\cdot 1770}{31} \Rightarrow$

$(9,71)$, $(30,40)$, $(51,9)$ λύσεις $\underline{169\leq t\leq 171}$

8) 11 άτομα = Ανδρ + Γυν + Παιδιά

$11=A+\Gamma+\Pi \Rightarrow \Pi=11-A-\Gamma$.

$400=40A+30\Gamma+\frac{10}{3}\Pi \Rightarrow 40\cancel{0}=4\cancel{0}A+3\cancel{0}\Gamma+\frac{1\cancel{0}}{3}(11-A-\Gamma)$

$120=12A+9\Gamma+11-A-\Gamma$.

$79=11A+8\Gamma$

$(11,8)=1$

$11=8\cdot 1+3 \rightarrow 3=11-8$

$8=3\cdot 2+2 \rightarrow 2=8-3\cdot 2$

$\rightarrow 3=2\cdot 1+1$

$1=3-2=3-8+3\cdot 2=-8+3\cdot 3=-8+(11-8)\cdot 3=11\cdot 3-8\cdot 4$

Λύσεις $A=3\cdot 79+8t\geq 0$ $\quad t\in\mathbb{Z}$

$\Gamma=(-4)\cdot 79-11t\geq 0 \Rightarrow$

$\frac{-3\cdot 79}{8}\leq\frac{\cancel{8}t}{\cancel{8}}\leq\frac{-4\cdot 79}{11}$ $\quad \frac{-4\cdot 79}{11}\geq\frac{\cancel{11}t}{\cancel{11}}$

$t=-29$

$\Delta=5,\ \Gamma=3,\ \Pi=33$

9) $\begin{cases} 3x+5y+7z=560 \\ 9x+25y+49z=2920 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x+15y+21z=1680 \\ 9x+25y+49z=2920 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+5y+7z=560 \ \oplus \\ \frac{10}{2}y+\frac{28z}{2}=\frac{1240}{2} \end{cases}$

$5y+14z=620 \xrightarrow{\text{λύνουμε}}$

$(5,14)=1$

$14=5\cdot 2+4 \rightarrow 4=14-5\cdot 2$

$5=4\cdot 1+1 \rightarrow 1=5-4=5-14+5\cdot 2=14(-1)+5\cdot 3$

Λύση $\boxed{\begin{matrix} y=3\cdot 620+14t \\ z=-620-5t \end{matrix}}$ (++)

$\oplus$, (++)

$3x+15\cdot 620+70t-7\cdot 620-35t=560.$

$\boxed{3x+35t=560-8\cdot 620=-4400}$ Ακέραιες λύσεις!

$(3,35)=1 \quad 35=3\cdot 12-1$ Λύσεις $\boxed{x=12\cdot(-4400)+35k}$

$t=1\cdot 4400-3k,\ k\in\mathbb{Z}$ (+++)

Από (++) και (+++)

$y=3\cdot 620+14\cdot 4400-42k$

$z=-620-5\cdot 4400+15k$

$k\in\mathbb{Z}$

#4. 1) $a\equiv b \bmod m \Rightarrow (\overset{km+\upsilon}{a},m)=(\overset{k'm+\upsilon}{b},m)$

$a-\beta=km \Rightarrow a=b+km$

$\delta=(a,m)=(b+km,m)=(b+km-km,m)=(b,m)$

2)

⊕	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

⊙	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

3) mod12

$\{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\}$ → $[11]_{12}^{-1}=[11]_{12}$

αντιστρέψιμες

$[1]_{12}^{-1}=[1]_{12}$ $\quad [5]_{12}^{-1}=[5]_{12}$ $\quad [7]_{12}^{-1}=[7]_{12}$

8) $2^{2n}=1 \bmod 3$

$2^{2n}=(2^2)^n=4^n$

$4 \bmod 3 = 1 \bmod 3 \Rightarrow 4^n = 1^n \bmod 3 \Rightarrow 2^{2n}=1 \bmod 3.$

$2^{3n}=1 \bmod 7$

$2^{3n}=(2^3)^n=8^n$

$8 \bmod 7 = 1 \bmod 7 \rightarrow 8^n \equiv 1^n \bmod 7 \rightarrow 2^{3n} \equiv 1 \bmod 7.$

<u>α περιττός</u>, $a^{2^n}=1 \bmod 2^{n+1}$

$n=1$ $\quad a^2-1=(a-1)(a+1)$ διαιρείται με το 4.

α περιττός → $a-1$, $a+1$ άρτιοι

$2\kappa+1$

$a-1=2\kappa$, $a+1=2\kappa+2=2(\kappa+1)$

Υποθέτουμε ότι $a^{2^k}=1 \bmod 2^{k+1} \Leftrightarrow 2^{k+1} | a^{2^k}-1$

θέλουμε $a^{2^{k+1}}=1 \bmod 2^{k+1+1}$

$a^{2^{k+1}}=a^{2\cdot 2^k}=a^{2^k+2^k}=a^{2^k}\cdot a^{2^k}=(a^{2^k})^2$

$a^{2^{k+1}}-1=(a^{2^k})^2-1=\underbrace{(a^{2^k}-1)}_{\text{διαιρείται από } 2^{k+1}}(a^{2^k}+1)$ (+)

θέλουμε άλλο ένα 2.

$\left.\begin{array}{l} a^{2^k}\equiv 1 \bmod 2^{k+1} \\ 1\equiv 1 \bmod 2^{k+1} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{2^k}+1\equiv 2 \bmod 2^{k+1}$

Τότε 2 διαιρεί το $a^{2^k}+1$

$(a^{2^k}+1)-2$ διαιρείται από 2^{k+1}, άρα απ' το 2.

Άρα το $2| a^{2^k}+1$ (άρτιος) (++)

$\left.\begin{array}{l} 2| a^{2^k}+1 \text{ και} \\ 2^{k+1} | a^{2^k}-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2^{k+1} | (a^{2^k}+1)(a^{2^k}-1)=a^{2^{k+1}}-1 \Rightarrow$

$a^{2^{k+1}}\equiv 1 \bmod 2^{k+2}$

$2^{20}=1 \bmod 41$

$2^5=32\equiv 32 \bmod 41$

$2^{10}\equiv (32)^2 \bmod 41\equiv$

$2^{20}-1=(2-1)(2^{19}+2^{18}+\dots+2^3+2+1)$

$2^6+2^5+\cancel{2^4}+2^3+2^2+\cancel{2}+1$

$2^6+2^4+2=2\cdot(2^5+2^3+1)$

$(a+\beta)^2=a^2+\beta^2$

$a^2+\cancel{2a\beta}+\beta^2=a^2+\beta^2 \bmod 2$

$a^p+\beta^p$ p πρώτος

(*) $(a+\beta)^p=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}a^{p-i}\beta^i$

$i=0$ $\binom{p}{0}=1$, $i\neq 0$, $p \Rightarrow \binom{p}{i}$ πολ/σιο του p

$i=p$ $\binom{p}{p}=1$

(*) $a^p+\beta^p+p\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}a^{p-i}\beta^i\right)$

$\equiv a^p+\beta^p \bmod p$